

DIE PROJEKTIVE GERADE ÜBER EINEM
LOKALEN RING; IHRE LINEARE GRUPPE
UND IHRE GEOMETRIE

Ulrich Melchior

1968

Die projektive Gerade über einem lokalen Ring;
ihre lineare Gruppe und ihre Geometrie.

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Ulrich Melchior

aus

Darmstadt

Bochum 1968

Referent : Professor Dr. W. Benz

Korreferent : Professor Dr. G. Ewald

Tag der mündlichen Prüfung : 21. Oktober 1968



Einleitung

Für die Gruppentheorie sind primitive Permutationsgruppen besonders wichtig. Jede bisher bekannte endliche einfache Gruppe besitzt eine Darstellung als primitive Permutationsgruppe. Die Erweiterungstheorie von Permutationsgruppen aber bringt zusätzliche Schwierigkeiten. Da in der Laguerre-Geometrie und in verwandten geometrischen Strukturen imprimitive Automorphismengruppen auftreten, sind Ergebnisse über imprimitive Permutationsgruppen von Bedeutung.

Im ersten Teil dieser Arbeit untersuchen wir eine Klasse höchstens einfach imprimitiver Permutationsgruppen. Unter einer EIP-Gruppe verstehen wir ein Tripel $(\Gamma, \mathcal{M}, \parallel)$, in dem Γ eine Permutationsgruppe auf der - nicht notwendig endlichen - Menge $\mathcal{M}$ ist und $\parallel$ ("parallel") die einzige von der Allrelation verschiedene maximale Γ -Äquivalenz^{*)} auf $\mathcal{M}$. Ist $\parallel$ nicht die Identitätsrelation auf $\mathcal{M}$, dann kann Γ z.B. nicht 2-fach transitiv auf $\mathcal{M}$ operieren. Wir führen deshalb eine Abschwächung der mehrfachen Transitivität ein: Γ operiert n -fach (scharf n -fach) $\parallel$ -transitiv auf $\mathcal{M}$, wenn es zu je zwei n -Tupeln paarweise nicht paralleler Elemente $\{A_i\}_{i=1}^n$ und $\{B_i\}_{i=1}^n$ ein (genau ein) γ in Γ gibt mit $\gamma A_i = B_i$ ($i=1, \dots, n$). Spezielle 3-fach

^{*)} Im Sinne von Wielandt: $A \parallel B \Rightarrow \gamma A \parallel \gamma B$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

$\parallel$ -transitive EIP-Gruppen sind die Gruppen $\text{PGL}(2, L)$ über einem kommutativen lokalen Ring L mit Einselement, dargestellt als Permutationsgruppe auf der projektiven Geraden über L . Petkantschin [6] und Tits [8] kennzeichneten die Gruppen $\text{PGL}(2, K)$ - K kommutativer Körper - unter den scharf 3-fach transitiven Permutationsgruppen. Die nach Petkantschin formulierte Eigenschaft, daß Γ keine Pseudoinvolutionen enthält (das sind Abbildungen, die zwei nicht parallele Elemente von $\mathcal{M}$ vertauschen, aber keine Involutionen sind), ist nicht kennzeichnend für die Gruppen $\text{PGL}(2, L)$ - L kommutativer lokaler Ring mit 1 - unter den scharf 3-fach $\parallel$ -transitiven EIP-Gruppen. Wir geben ein Gegenbeispiel an. Die Kennzeichnung gelingt aber - in § 3 - durch eine zusätzliche Eigenschaft, die an den Satz von den drei Spiegelungen erinnert. Allerdings bleiben EIP-Gruppen ausgeschlossen, bei denen $\mathcal{M}$ nur aus drei $\parallel$ -Klassen besteht. Daß dies notwendig ist, zeigt wieder ein Beispiel.

Im zweiten Teil - § 4 - werden Berührstrukturen eingeführt, die eine gemeinsame Verallgemeinerung der von Benz definierten Berührstrukturen aus [1] und der Laguerreschen Berührstrukturen aus [2] sind. Spezielle solche Berührstrukturen sind die Geometrien (K, L) , L kommutativer lokaler Ring mit 1, K lokaler Unterring von L , der die 1 von L enthält. Die zusätzliche Bedingung, daß jedes in L reguläre Element von K auch in K regulär

ist, bedeutet keine Einschränkung, da die Geometrie durch eine Quotientenerweiterung von K in L nicht verändert wird. Die Kennzeichnung der $PGL(2,L)$ über einem lokalen Ring L aus § 3 liefert nun auch eine Kennzeichnung dieser Geometrien (K,L) .

Auch die Möbiusgeometrie in Desarguesschen Hjelmslev-ebenen läßt sich so beschreiben. L ist dann eine reguläre quadratische Erweiterung von K .

In § 5 schließlich werden bestimmte Laguerresche Berührstrukturen näher untersucht. Wir zeigen, daß eine genügend reichhaltige Laguerresche Berührstruktur eine Geometrie (K,L) ist, L Laguerresche Algebra über dem kommutativen Körper K , wenn sie eine 3-fach $\parallel$ -transitive Automorphismengruppe von 1. Art ohne Pseudoinvolutionen gestattet. Außerdem kennzeichnen wir zwei Klassen von Laguerreschen Berührstrukturen durch ihre Automorphismengruppe: Die Miquelschen Laguerre-Ebenen - sie wurden von v.d.Waerden und Smid [9] untersucht - sind die einzigen Laguerreschen Berührstrukturen, die eine auf den Punkten 3-fach $\parallel$ -transitive Automorphismengruppe vom Rang 3 ohne Pseudoinvolutionen besitzen. Die zweite Klasse ist die der Laguerre-Geometrien (K,L) mit $N^2=(0)$ für das maximale Ideal N von L und Charakteristik von K ungleich zwei, die von Mäurer [4] spiegellungsgeometrisch begründet wurde. Nur diese Laguerreschen Berührstrukturen be-

sitzen eine auf den Punkten 3-fach $\mathbb{I}$ -transitive Automorphismengruppe von erster Art ohne Pseudoinvolutionen, deren $\mathbb{I}$ -Kern abelsch ist.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Benz, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Hinweise.

Außerdem danke ich Frau K. Fromme für das Schreiben des Manuskriptes.

Bezeichnungen und Definitionen

Für die folgenden Definitionen und Bezeichnungen sei $(\Gamma, \mathcal{M}, \parallel)$ eine EIP-Gruppe.

Wir benutzen für Γ die Funktionalschreibweise: γP ist für ein P aus $\mathcal{M}$ das Bild von P unter der Abbildung γ aus Γ . Produkte von Abbildungen aus Γ sind also von rechts nach links zu lesen.

I ist die Identität aus Γ .

Die Elemente von $\mathcal{M}$ werden oft Punkte genannt.

"Nicht parallel" wird "n.p.", "paarweise nicht parallel" wird "p.n.p." abgekürzt.

Für ein A aus $\mathcal{M}$ ist $\bar{A} = \{ B \in \mathcal{M} ; B \parallel A \}$. $\overline{\mathcal{M}}$ ist die Menge der $\parallel$ -Klassen von $\mathcal{M}$.

Unter dem $\parallel$ -Kern von Γ verstehen wir die Untergruppe H der Abbildungen γ aus Γ , für die $\gamma P \parallel P$ für alle P aus $\mathcal{M}$ gilt.

H ist normal in Γ .

Involution nennen wir eine Abbildung ι aus Γ , wenn sie nicht zum $\parallel$ -Kern H gehört und ihre Ordnung 2 ist.

Die Menge aller Involutionen mit dem gemeinsamen Fixpunkt A bezeichnen wir mit $I(A)$.

Ist die Abbildung α aus Γ durch ihre Wirkung auf p.n.p. Punkte $A, B, \dots, D$ von $\mathcal{M}$ eindeutig bestimmt, dann schreiben wir auch $\alpha = \begin{pmatrix} A & B & \dots & D \\ \alpha A & \alpha B & \dots & \alpha D \end{pmatrix}$; statt $\alpha = (\dots \begin{smallmatrix} A \\ A \end{smallmatrix} \dots)$ schreiben wir $\alpha = (\dots A \dots)$.

Wie üblich verstehen wir unter Γ_A die Standuntergruppe von Γ zu dem Punkt A von $\mathcal{M}$, also die Menge aller Abbildungen aus Γ , die den Punkt A festlassen. $\Gamma_{A,B}$ ist für n.p. Punkte A und B von $\mathcal{M}$ die Untergruppe der Abbildungen aus Γ , die A und B festlassen. Für eine Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ ist $\Gamma_{\mathcal{N}}$ die Untergruppe der Abbildungen aus Γ , die $\mathcal{N}$ auf sich abbilden.

Es sollen nun einige Eigenschaften von EIP-Gruppen $(\Gamma, \mathcal{M}, \#)$ mit ihren Bezeichnungen zusammengestellt werden, die in dieser Arbeit untersucht werden:

- (T) Γ operiert scharf 3-fach $\#$ -transitiv auf $\mathcal{M}$.
- (T*) Γ operiert 3-fach $\#$ -transitiv auf $\mathcal{M}$.
- (I) Γ enthält keine Pseudoinvolutionen, d.h. jede Abbildung aus Γ , die zwei n.p. Punkte von $\mathcal{M}$ vertauscht, ist eine Involution.
- (I*) $\Gamma_{A,B}$ ist kommutativ für n.p. Punkte A und B von $\mathcal{M}$.
- (III) Sind ι, κ, λ Involutionen aus Γ mit gemeinsamem Fixpunkt A, dann gilt $(\iota\kappa\lambda)^2 = I$.
- (III*) Für $A \in \mathcal{M}$ enthält Γ_A einen auf $\mathcal{M} - A$ regulären abelschen Normalteiler.

Es werden nur solche EIP-Gruppen $(\Gamma, \mathcal{M}, \#)$ untersucht, für die $\mathcal{M}$ aus mindestens drei $\#$ -Klassen besteht.

§ 1 EIP-Gruppen mit (T) und (I)

Zunächst sollen für EIP-Gruppen $(\Gamma, \mathcal{M}, \#)$ einige Folgerungen aus den Eigenschaften

(T*) Γ operiert 3-fach $\#$ -transitiv auf $\mathcal{M}$,

(I) jede Abbildung aus Γ , die zwei n.p. Elemente von $\mathcal{M}$ vertauscht, ist eine Involution,

hergeleitet werden.

(1.1) Satz: In einer EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{M}, \#)$ mit (T*) und (I) gilt auch

(I*) Die Standuntergruppe von Γ zu zwei n.p.

Punkten von $\mathcal{M}$ ist kommutativ.

Beweis: Seien A und B n.p. Punkte von $\mathcal{M}$, ϕ eine Involution,

die A und B vertauscht. Dann gilt für alle $\gamma \in \Gamma_{A,B}$:

$$\gamma \phi \gamma \phi = I \text{ und } \phi \gamma \phi = \gamma^{-1}, \text{ also für alle } \alpha, \beta \text{ aus } \Gamma_{A,B}: \\ \alpha \beta = \alpha \phi \phi \beta = \phi \alpha^{-1} \beta^{-1} \phi = \phi (\beta \alpha)^{-1} \phi = \beta \alpha.$$

(1.2) Satz: In einer EIP-Gruppe mit (T*) und (I*) gilt:

(T) Γ operiert scharf 3-fach $\#$ -transitiv auf $\mathcal{M}$.

Beweis: Aus (T*) folgt, daß die Standuntergruppe $\Gamma_{A,B}$ zu zwei n.p. Elementen A und B von $\mathcal{M}$, die nach Voraussetzung kommutativ ist, transitiv auf den Elementen von $\mathcal{M}$ operiert, die weder zu A noch zu B parallel sind.

Die Behauptung folgt dann sofort aus dem Satz^{*)}, daß jede auf einer Elementmenge $\mathcal{M}$ transitive Permutationsgruppe auf $\mathcal{M}$ regulär operiert, sofern sie kommutativ ist.

(1.3) In einer EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{M}, \parallel)$ mit (T) und (I*) enthält der $\parallel$ -Kern H von Γ jede Abbildung aus Γ , die zwei n.p. Punkte von $\mathcal{M}$ und eine weitere $\parallel$ -Klasse von $\mathcal{M}$ (diese als Ganze) festläßt.

Beweis: Sei α eine Abbildung aus Γ , zu der es p.n.p. Punkte A, B, C aus $\mathcal{M}$ gibt mit $\alpha A = A$, $\alpha B = B$, $\alpha C = D \parallel C$. Für ein beliebiges X aus $\mathcal{M}$, das weder zu A noch zu B parallel ist, sei $\eta = (A, B, \overset{C}{X})$. Da α und η beide zu $\Gamma_{A, B}$ gehören, gilt $\alpha\eta = \eta\alpha$, was $\alpha X = \eta\alpha\eta^{-1}X = \eta\alpha C = \eta D \parallel \eta C = X$, also $\alpha X \parallel X$ zur Folge hat, da $\parallel$ eine Γ -Äquivalenz ist.

(1.4) Satz: Die EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{M}, \parallel)$ genüge (T) und (I*). Dann folgt für ein η aus Γ aus der Existenz von p.n.p. Punkten A_1, A_2, A_3 von $\mathcal{M}$ mit $\eta A_i \parallel A_i$ ($i=1, 2, 3$) schon, daß η zum $\parallel$ -Kern H von Γ gehört.

Beweis: Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge von (1.3). Sind nämlich zu einer solchen Abbildung η aus Γ drei Transformationen η_i definiert durch $\eta_1 = (\overset{A_1}{\eta A_1}, A_2, A_3)$, $\eta_2 = (\eta A_1, \overset{A_2}{\eta A_2}, A_3)$ und $\eta_3 = (\eta A_1, \eta A_2, \overset{A_3}{\eta A_3})$, dann ist η das Produkt dieser drei Transformationen: $\eta = \eta_3 \eta_2 \eta_1$. Diese Abbildungen haben alle die Eigenschaft, aus der in (1.3) die Zugehörigkeit zu H gefolgert wurde. Deshalb ge-

^{*)}S.z.B. Wielandt [10].

hört auch ihr Produkt η zu H.

(1.5) Lemma: Es sei $(\Gamma, \overline{\sigma\sigma}, //)$ eine EIP-Gruppe mit (T) und (I^*) , A, B, C p.n.p. Punkte von $\overline{\sigma\sigma}$, $\Phi = (\frac{A}{B}, \frac{B}{A}, C) \in \Gamma$. Dann bleibt für alle $\delta \in \Gamma_{A,B}$ der Punkt $(\Phi \delta)^2 C$ fest unter Φ . Außerdem gehört die Abbildung $(\Phi \delta)^2$ zu H. Beweis: Die Abbildung $\Phi \delta \Phi$ gehört wie δ zu $\Gamma_{A,B}$, $\Phi \delta \Phi$ und δ sind also vertauschbar. Es gilt also $\Phi(\Phi \delta)^2 C = \Phi \delta \Phi \delta \Phi C$. Nun zum zweiten Teil der Behauptung. Tits zeigte in [8]: In einer scharf dreifach transitiven Permutationsgruppe, deren Standuntergruppen zu zwei verschiedenen Elementen kommutativ sind, ist jede Abbildung, die zwei verschiedene Elemente vertauscht, eine Involution. Ist H der $//$ -Kern von Γ , dann operiert Γ/H scharf dreifach transitiv auf $\overline{\sigma\sigma}$. Dies folgt aus (T) und Satz (1.4). Da wegen (I^*) die Standuntergruppe von Γ/H zu zwei Elementen von $\overline{\sigma\sigma}$, also $//$ -Klassen von $\overline{\sigma\sigma}$, kommutativ ist, kann man den zitierten Satz von Tits anwenden: modulo H ist also jede Abbildung aus Γ , die zwei n.p. Punkte von $\overline{\sigma\sigma}$ vertauscht, eine Involution, oder - anders gesagt - ihr Quadrat gehört zu H.

(1.6) Satz: Für eine EIP-Gruppe mit den Eigenschaften (T) und (I^*) , für die $\overline{\sigma\sigma}$ aus mindestens 4 $//$ -Klassen besteht, sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(III) Für drei Involutionen ι, κ, λ aus Γ
mit gemeinsamem Fixpunkt gilt $(\iota \kappa \lambda)^2 = I$.

(III*) Es gibt in Γ_A (A aus $\mathcal{M}$) einen abelschen
Normalteiler, der auf $\mathcal{M} - \bar{A}$ regulär operiert.

Beweis: (III) $\Rightarrow$ (III*).

$I^2(A)$ sei die Menge aller Produkte von zwei Involutionen
aus $I(A)$, also mit Fixpunkt A . Es soll gezeigt werden,
daß $I^2(A)$ ein auf $\mathcal{M} - \bar{A}$ regulärer abelscher Normalteiler
von Γ_A ist.

(1.6.1) $I^2(A)$ ist transitiv auf $\mathcal{M} - \bar{A}$.

Seien nämlich $C, D \in \mathcal{M} - \bar{A}$. Nach Voraussetzung gibt es
in $\mathcal{M} - \bar{A}$ ein T , das weder zu C noch zu D parallel ist.
Sind ι und κ die Elemente von $I(A)$ mit $\iota C = T, \kappa T = D$, dann
hat man $\kappa \iota \in I^2(A)$ und $\kappa \iota C = D$.

(1.6.2) $I^2(A)$ operiert scharf transitiv auf $\mathcal{M} - \bar{A}$.

Sei $\alpha = \kappa \iota$ ein nach (1.6.1) konstruiertes Element von
 $I^2(A)$ mit $\alpha C = D$, also $\iota C \neq C$. Für ein weiteres $\beta = \mu \nu$
aus $I^2(A)$ mit $\beta C = D$ ist $\kappa \mu \nu$ nach (III) eine Involution,
da $\kappa \mu \nu C = \kappa D = \iota C \neq C$. Es folgt $\kappa \mu \nu = \iota$. Damit ist
 $\alpha = \kappa \iota = \mu \nu = \beta$ bewiesen.

(1.6.3) $I^2(A)$ ist eine Gruppe.

Für $\alpha = \iota \kappa$ mit $\iota, \kappa \in I(A)$ gilt: $\alpha^{-1} = (\iota \kappa)^{-1} = \kappa \iota$.
Deshalb gehört mit einer Abbildung auch ihre Inverse zu
 $I^2(A)$. Seien nun $\alpha, \beta \in I^2(A)$ und $C \in \mathcal{M} - \bar{A}$. Zum Nach-
weis von $\alpha/\beta \in I^2(A)$ unterscheidet man zwei Fälle:

1.) $|\overline{\delta\delta\tau}| \geq 5$. Man kann den Faktor λ von $\alpha = \kappa\lambda$ ($\kappa, \lambda \in I(A)$) wegen (1.6.2) so wählen, daß λC nicht zu $\overline{C\alpha\beta C} \cup \overline{\alpha\beta C}$ gehört. Da die Abbildung $\gamma = \lambda/\beta$ wegen (III) und $\lambda/\beta C \neq C$ eine Involution ist, gilt $\alpha\beta = \kappa\gamma \in I^2(A)$.

2.) $|\overline{\delta\delta\tau}| = 4$. In diesem Fall lassen die Elemente von $I^2(A)$ entweder alle $\parallel$ -Klassen oder außer $\overline{A}$ keine $\parallel$ -Klasse von $\overline{\delta\delta\tau}$ fest, während die Involutionen aus $I(A)$ außer $\overline{A}$ genau jeweils noch eine Fixklasse haben. Deshalb kann das Produkt einer Abbildung aus $I^2(A)$ und einer Involution aus $I(A)$, dessen Ordnung nach (III) kleiner oder gleich 2 ist, nicht zu H gehören; es ist also eine Involution aus $I(A)$. Für $\alpha = \kappa\lambda$ gehört somit $\gamma = \lambda/\beta$ zu $I(A)$ und $\alpha\beta = \kappa\gamma$ zu $I^2(A)$.

(1.6.4) $I^2(A)$ ist abelsch.

Sei $\alpha = \kappa\lambda \in I^2(A)$, $\beta = \mu\nu \in I^2(A)$ mit $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in I(A)$. Aus $(\kappa\lambda\mu)^2 = I$ folgt $\kappa\lambda\mu = \mu\lambda\kappa$, aus $(\lambda\kappa\nu)^2 = I$ folgt $\lambda\kappa\nu = \nu\kappa\lambda$. Damit hat man $\alpha\beta = \kappa\lambda\mu\nu = \mu\lambda\kappa\nu = \mu\nu\kappa\lambda = \beta\alpha$.

(1.6.5) $I^2(A)$ ist Normalteiler von Γ_A .

Sei wieder $\alpha = \kappa\lambda \in I^2(A)$ mit $\kappa, \lambda \in I(A)$; $\tau \in \Gamma_A$. Da H normal ist in Γ , und κ sowie λ nach Voraussetzung nicht zu H gehören, sind $\tau\kappa\tau^{-1}$ und $\tau\lambda\tau^{-1}$ Involutionen aus $I(A)$. Es folgt: $\tau\alpha\tau^{-1} = \tau\kappa\lambda\tau^{-1} = \tau\kappa\tau^{-1}\tau\lambda\tau^{-1}$ gehört zu $I^2(A)$.

Aus (III*) folgt (III).

Der auf $\overline{\delta\delta\tau} - \overline{A}$ reguläre abelsche Normalteiler von Γ_A sei

mit I_A^+ bezeichnet. Aus der Regularität folgt, daß I_A^+ durch seine Elemente erzeugt wird, die nicht zu H gehören. Sei nun C ein beliebiges, aber fest gewähltes Element von $\mathfrak{M}-\bar{A}$.

(1.6.6) Jedes Element von I_A^+ , das außer $\bar{A}$ noch eine weitere $\parallel$ -Klasse von $\mathfrak{M}$ festläßt, gehört zu H , d.h. $I_A^+ \cap H = \{\eta \in I_A^+; \eta C \parallel C\}$. Sei $\alpha \in I_A^+$, $\alpha C = D \parallel C$. Ist B ein weiteres Element von $\mathfrak{M}-\bar{A}$, und β die Abbildung aus I_A^+ mit $\beta C = B$, dann folgt $\alpha B = \alpha \beta C = \beta \alpha C = \beta D$ und $B = \beta C \parallel \beta D = \alpha B$.

(1.6.7) Der Automorphismus von I_A^+ , der jedes Element in sein Inverses überführt, wird durch eine Abbildung aus $\Gamma_{A,C}$ induziert.

Sei $\alpha \in I_A^+$, $\alpha \notin H$, mit $\alpha C = D$. Wegen (1.6.6) gilt $D \nparallel C$. Da H normal ist in Γ , gehört auch α^{-1} nicht zu H . Sei $D_1 = \alpha^{-1} C$. Wegen (1.6.6) gilt auch $D_1 \nparallel C$. Deshalb gibt es in $\Gamma_{A,C}$ ein γ mit $\gamma D = D_1$, also $\alpha^{-1} D = D_1 = \gamma D = \gamma \alpha C = \gamma \alpha \gamma^{-1} C$. Da I_A^+ regulär auf $\mathfrak{M}-\bar{A}$ operiert, folgt $\alpha^{-1} = \gamma \alpha \gamma^{-1}$. Sei nun β ein weiteres Element von I_A^+ , das nicht zu H gehört. Sei $\beta C = \delta \alpha C$ mit $\delta \in \Gamma_{A,C}$. Dann folgt $\beta = \delta \alpha \delta^{-1}$. Man rechnet nun aus: $\beta^{-1} = \delta \alpha^{-1} \delta^{-1} = \delta \gamma \alpha \gamma^{-1} \delta^{-1} = \gamma \delta \alpha \delta^{-1} \gamma^{-1} = \gamma \beta \gamma^{-1}$, da $\Gamma_{A,C}$ kommutativ ist. Für alle Elemente α von I_A^+ , die nicht zu H gehören, ist somit die Relation $\alpha^{-1} = \gamma \alpha \gamma^{-1}$ nachgewiesen. Sie gilt also für ganz I_A^+ , da I_A^+ von diesen Elementen erzeugt wird.

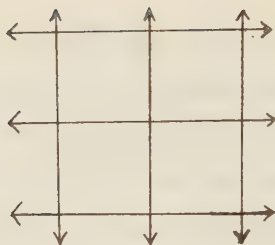
(1.6.8) Zu Punkten B und D aus $\mathfrak{MN}-\bar{A}$ gibt es höchstens ein $\iota \in I(A)$ mit $\iota B = D$.

Wegen (T) ist dies nur für $B \parallel D$ zu beweisen. Seien also ι_1 und ι_2 Involutionen aus $I(A)$ mit

$\iota_1 B = \iota_2 B = D \parallel B$. Wählt man das C aus (1.6.6) und (1.6.7) so, daß $C \nparallel B$, dann gilt für das zu C gehörige γ aus (1.6.7): $\iota_1 C \nparallel C \nparallel \iota_2 C$; außerdem für die Abbildungen α_i aus I_A^+ mit $\alpha_i C = \iota_i C$: $\iota_i = \alpha_i \gamma$ ($i=1,2$). Es folgt $\alpha_1 = \iota_1 \gamma$ und $\alpha_2 = \iota_2 \gamma$. Für $F = \gamma^{-1} B$ hat man $\alpha_1 F = \alpha_2 F$, woraus wegen der Regularität von I_A^+ $\alpha_1 = \alpha_2$ und somit $\iota_1 = \iota_2$ folgt.

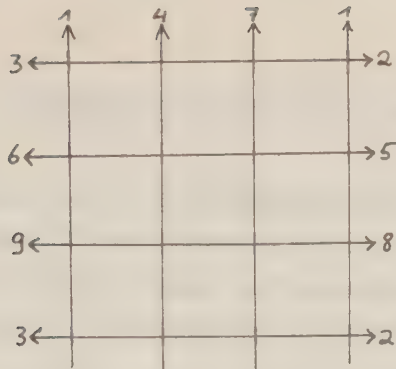
Ist C ein beliebiges Element von $\mathfrak{MN}-\bar{A}$, γ das gemäß (1.6.7) zugehörige - involutorische - Element aus $\Gamma_{A,C}$, dann gilt für alle α, β, δ aus I_A^+ : $(\alpha \gamma)^2 = \alpha \gamma \alpha \gamma = \alpha \alpha^{-1} = I$ und $(\alpha \gamma \beta \gamma \delta \gamma)^2 = (\alpha \beta^{-1} \delta \gamma)^2 = I$. $I(A)$ ist also sicher in der Menge aller Abbildungen $\alpha \gamma$ mit α aus I_A^+ enthalten. Deshalb ist (III) also erfüllt. In etwas anderem Zusammenhang wurde die Beziehung zwischen (III) und (III*) von Schiek [7] untersucht.

Daß für EIP-Gruppen $(\Gamma, \mathfrak{MN}, \parallel)$ mit $|\mathfrak{MN}| \geq 4$ nicht schon aus (T) und (I) die Eigenschaft (III) folgt, zeigt ein Beispiel.



Figur 1

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der in Figur 1 eingezeichneten gerichteten Geraden, aufgefaßt als Teilmenge der Speermenge der klassischen Laguerre-Geometrie. Die horizontalen und vertikalen Außengeraden gleicher Richtung seien identifiziert. Zykel seien genannt die Teilmengen von $\mathcal{M}$, die in klassischen Laguerre-Zykeln enthalten sind. Die durch diese Zykeldefinition eingeführte Parallelrelation (man vergleiche den Bericht [3] von Benz und Mäurer) ist identisch mit der auf $\mathcal{M}$ eingeschränkten klassischen Parallelrelation. Bezeichnet man die Gruppe aller Zykelverwandtschaften der so definierten Zykelebene mit Γ , dann hat $(\Gamma, \mathcal{M}, //)$ als EIP-Gruppe die Eigenschaften (T) und (I), $|\overline{\mathcal{M}}| = 4$, aber (III) ist nicht erfüllt.



Figur 2

Analog zum ersten Beispiel wird durch Figur 2 eine Zykelebene definiert. Hier gilt ersichtlich $|\overline{m}|=3$. In der vollen Automorphismengruppe dieser Zykelebene gibt es mehrere Untergruppen Γ , die als EIP-Gruppen $(\Gamma, \overline{m}, //)$ die Eigenschaften (T) und (I) haben, sowie auch (III). Sie erfüllen aber nicht (III*). Die Voraussetzung $|\overline{m}| \geq 4$ ist in Satz (1.6) also nicht entbehrlich. Eine Gruppe von Zykelverwandtschaften der oben angegebenen Art wird von folgenden Abbildungen erzeugt:

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 8 & 7 & 9 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 7 & 9 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 4 & 9 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dies wurde auf der IBM-7090 des Deutschen Rechenzentrums in Darmstadt ausgerechnet. Auch das erste Beispiel wurde dort durchgerechnet.

§ 2 Die Gruppen $PGL(2, L)$ als EIP-Gruppen

Sei L ein kommutativer lokaler Ring mit 1 , N sein maximales Ideal. Sei G die Gruppe der 2×2 -Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ über L mit $(ad-bc) \notin N$. Die Untergruppe der Elemente $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ aus G ist das Zentrum von G . Als $PGL(2, L)$ definiert man die Faktorgruppe von G nach ihrem Zentrum Z . Zur Vereinfachung der Schreibweise rechnet man in G und unterscheidet Elemente von G nicht, die kongruent sind modulo Z .

Als projektive Gerade $P(L)$ über L bezeichnet man die Menge der geordneten Paare $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ von Elementen aus L , bei denen nicht beide Komponenten zu N gehören. Es wird $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ gesetzt, wenn es ein $r \in L$ gibt mit $ra=c$ und $rb=d$.

Zwei Elemente $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ aus $P(L)$ heißen parallel, $A \parallel C$, wenn $(ad-bc) \notin N$. "Parallel" ist eine Äquivalenzrelation.

Die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind p.n.p. $PGL(2, L)$ operiert auf natürliche Weise auf $P(L)$.

(2.1) $\parallel$ ist eine $PGL(2, L)$ -Äquivalenz.

Beweis: Seien $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ Punkte von $P(L)$ mit $A \parallel C$, also $(ad-bc) = n \notin N$. Ist $\gamma = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ nun eine Abbildung aus $PGL(2, L)$, also $(eh-fg) = r \notin N$, dann gilt $\gamma A = \begin{pmatrix} ea+fb \\ ga+hb \end{pmatrix}$ und $\gamma C = \begin{pmatrix} ec+fd \\ gc+hd \end{pmatrix}$ und $(ea+fb)(gc+hd) - (ec+fd)(ga+hb) = ehad + fgbc + fgad + ehbc = rad - rbc = rn$. Daraus folgt $\gamma A \parallel \gamma C$.

(2.2) Das Tripel $(I, \mathcal{M}, \parallel)$ mit $I = PGL(2, L)$, $\mathcal{M} = P(L)$, $\parallel$ wie

oben definiert, hat als EIP-Gruppe die Eigenschaften (T), (I) und (III).

Beweis: Zunächst wird in drei Schritten (T*) gezeigt.

(2.2.1) Γ ist transitiv auf $\mathcal{M}$.

Für $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ mit $p \neq 0$ - wir sagen dafür auch p regulär - ist $\pi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ eine Abbildung aus Γ mit $\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P$; für $p \in \mathbb{N}$, also q regulär, gilt $\begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P$; $\begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ gehört dann zu Γ .

(2.2.2) Die Standuntergruppe von Γ zu $\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist transitiv auf $\mathcal{M} - \overline{\infty}$.

Für $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ beliebig aus $\mathcal{M} - \overline{\infty}$ ist $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$ eine Abbildung aus Γ mit $\gamma O = E$.

(2.2.3) Die Untergruppe $\Gamma_{\infty, 0}$ von Γ ist transitiv auf $\mathcal{M} - (\overline{\infty} \cup \overline{0})$.

Für ein $R = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ aus $\mathcal{M}$, das weder zu ∞ noch zu 0 parallel ist, für das also r und s regulär sind, gilt $\zeta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = R$ mit $\zeta = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in \Gamma_{\infty, 0}$.

(2.2.4) $\parallel$ ist die einzige von der Allrelation verschiedene maximale Γ -Äquivalenz.

Dies folgt sofort aus (T*).

(2.2.5) $(\Gamma, \mathcal{M}, \parallel)$ hat die Eigenschaft (I).

Wegen Eigenschaft (T*) ist nur zu zeigen, daß jede Abbildung aus Γ , die $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vertauscht, eine Involution ist. Sei also $\iota = \begin{pmatrix} k & 1 \\ m & n \end{pmatrix}$ eine Abbildung aus Γ mit $\iota \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\iota \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $k=n=0$ und sowohl 1 als auch m regulär. Dann gilt für alle $T = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ aus $\mathcal{M}$: $\iota T = \begin{pmatrix} 1v \\ mu \end{pmatrix}$ und

$\iota^2 T = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & l \end{pmatrix} u$. Da L als kommutativ vorausgesetzt war, folgt $\iota^2 = I$. ι ist also eine Involution.

(2.2.6) Der $\parallel$ -Kern H von Γ besteht aus allen Elementen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ von Γ , für die b, c und $a-d$ zu N gehören.

Sei $\eta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Abbildung aus Γ mit $\eta 0 \parallel 0$, $\eta \infty \parallel \infty$ und $\eta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wegen Satz (1.4) gehört η zu H . Aus $\eta 0 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \parallel 0$ folgt $b \in N$. Wegen $\infty \parallel \eta \infty = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ gilt $c \in N$; wegen $\eta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $a+b-c-d \in N$, was $(a-d) \in N$ zur Folge hat.

(2.2.7) $(\Gamma, \mathfrak{M}, \parallel)$ hat die Eigenschaft (III).

Wegen der Transitivität von Γ auf $\mathfrak{M}$ kann man zum Beweis $A = \infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ annehmen. Jede Abbildung aus Γ , die ∞ fest läßt, hat die Form $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Wir interessieren uns für die Involutionen unter ihnen, also für diejenigen $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, für die $\kappa^2 = I$. Für sie gilt $d^2 = 1$ und $b(1+d) = 0$. Man hat also entweder $d = -1$ oder sowohl b als auch $1+d$ sind Nullteiler. Im zweiten Fall gehörte κ aber zu H , was ja ausgeschlossen ist. Nun rechnet man aus: sind ι, κ, λ Involutionen aus Γ_∞ , etwa $\iota = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, dann gilt $\delta = \iota \kappa \lambda = \begin{pmatrix} 1 & f-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g+e-f \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und damit $\delta^2 = (\iota \kappa \lambda)^2 = I$.

(2.2.8) $(\Gamma, \mathfrak{M}, \parallel)$ hat auch die Eigenschaft (T).

Da in $(\Gamma, \mathfrak{M}, \parallel)$ die Eigenschaften (T^*) und (I) gelten, folgt dies aus Satz (1.2).

§ 3 Kennzeichnung der Gruppen $\text{PGL}(2, L)$ als EIP-Gruppen

In diesem Abschnitt sei $(\Gamma, \mathcal{M}, \parallel)$ eine EIP-Gruppe mit den Eigenschaften (T), (I) und (III), sowie $|\overline{\mathcal{M}}| \geq 4$. Außerdem seien von nun ab $0, 1, \infty$ drei p.n.p. Elemente von $\mathcal{M}$. Wir setzen $\mathcal{M}' = \mathcal{M} - \infty$ und $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} - (\overline{0}, \infty)$. Weiter bezeichnen wir mit I^+ den auf $\mathcal{M}'$ regulären abelschen Normalteiler von Γ_∞ gemäß Satz (1.6). Für $A \in \mathcal{M}^*$ setzen wir $A_* = (0 \infty_A^1)$. Da $\Gamma_{0, \infty}$ regulär ist auf $\mathcal{M}^*$, gilt

$$(3.1) \quad (A_* B)_* = A_* B_* \text{ für alle } A, B \text{ aus } \mathcal{M}^*.$$

Für $B \in \mathcal{M}'$ bezeichnen wir mit B_+ die Abbildung aus I^+ mit $B_+ 0 = B$. Auch hier folgt aus der Regularität von I^+ - diesmal auf $\mathcal{M}'$:

$$(3.2) \quad (A_+ B)_+ = A_+ B_+ \text{ für alle } A, B \text{ aus } \mathcal{M}'.$$

$$(3.3) \quad \text{Für alle } A \in \mathcal{M}^*, \text{ sowie } B, C \in \mathcal{M}' \text{ gilt } A_* B_+ C = (A_* B)_+ A_* C.$$

Beweis: Da I^+ regulärer Normalteiler von Γ_∞ ist, gilt $A_* B_+ = A_* B_+ (A_*)^{-1} A_* = (A_* B)_+ A_*$. Durch Anwendung dieser Abbildung auf C erhält man die Behauptung.

(3.4) Definiert man für $A, B \in \mathcal{M}'$: $A+B = A_+ B$, dann hat $\mathcal{M}'$ bezüglich der Verknüpfung $+$ die Struktur einer abelschen Gruppe. Dies folgt unmittelbar daraus, daß I^+ eine auf $\mathcal{M}'$ reguläre abelsche Untergruppe von Γ_∞ ist.

Zu $A \in \mathfrak{M}'$ sei für das Folgende das inverse Element bezüglich $+$ mit $-A$ bezeichnet. Für A, B aus $\mathfrak{M}'$ wird gesetzt: $A-B=A+(-B)$.

(3.5) $\bar{O}$ ist bezüglich $+$ eine Untergruppe von $\mathfrak{M}'$.

Dies folgt sofort daraus, daß $\parallel$ eine Γ -Äquivalenz ist.

Für U und V aus $\mathfrak{M}'$ wird nun definiert:

$$U * V = \begin{cases} U * V, & \text{wenn } U \in \mathfrak{M}^*, \\ U' * V - U'' * V, & \text{wenn } U = U' - U'' \in \bar{O}, \text{ aber } U' \text{ und } U'' \text{ aus } \mathfrak{M}^*. \end{cases}$$

(3.6) Satz: Mit der Verknüpfung $+$ als Addition und $*$ als Multiplikation hat $\mathfrak{M}'$ die Struktur eines kommutativen lokalen Ringes mit 1, der Grundring des Tripels (der EIP-Gruppe) $(\Gamma, \mathfrak{M}, \parallel)$ genannt wird.

Beweis (wieder in mehreren Schritten):

(3.6.1) $U * V$ ist für alle $U \in \bar{O}$, $V \in \mathfrak{M}'$ unabhängig von der speziellen Wahl von U' aus $\mathfrak{M}^*$.

Sei nämlich $T' = U' + W$, $T'' = U'' + W$ mit U', U'', T', T'' aus $\mathfrak{M}^*$. Ist V regulär (d.h. $V \in \mathfrak{M}^*$), dann gilt $T' * V - T'' * V = V * T' - V * T'' = V * (T' - T'') = V * (U' - U'') = V * U' - V * U'' = U' * V - U'' * V$. Gehört aber $V = V' - V''$ zu $\bar{O}$ mit regulären V' und V'' , dann hat man $T' * V - T'' * V = T' * V' - T' * V'' - T'' * V' + T'' * V'' = V' * U' + V' * W - V'' * U' - V'' * W - V' * U'' - V' * W + V'' * U'' + V'' * W = U' * V' - U' * V'' - U'' * V' + U'' * V'' = U' * (V' - V'') - U'' * (V' - V'') = U' * V - U'' * V$.

(3.6.2) $*$ ist kommutativ.

Da für alle $U, V \in \mathfrak{M}^*$ wegen (3.1) $U * V = U * V = U * V * 1 = V * U = V * U$, ist $U * V = V * U$ nur für $V = V' - V'' \in \bar{O}$ mit regulären V' und V'' zu zeigen. Ist U regulär, dann gilt $U * V = U * (V' - V'') = U * V' - U * V'' = V' * U - V'' * U = V * U$.

Ist hingegen $U = U' - U'' \in \overline{O}$, U' und U'' regulär, dann hat man
 $U * V = U' * V' - U' * V'' - U'' * V' + U'' * V'' = V' * U - V'' * U = V * U$.

(3.6.3) In $\mathfrak{M}'$ gelten beide Distributivgesetze.

Da $*$ kommutativ ist, braucht man nur eines zu zeigen; etwa:
 $A * (B + C) = A * B + A * C$ für alle A, B, C aus $\mathfrak{M}'$. Wegen (3.3) ist es
 nur noch für $A = A' - A'' \in \overline{O}$, A' und A'' regulär, zu beweisen. In
 diesem Fall gilt aber $A * (B + C) = A' * (B + C) - A'' * (B + C) = A' * B + A' * C - A'' * B - A'' * C =$
 $= A * B + A * C$.

(3.6.4) $*$ ist assoziativ, also $A * (B * C) = (A * B) * C$ für alle
 $A, B, C \in \mathfrak{M}'$.

Hier unterscheiden wir drei Fälle:

a) Für alle $C \in \mathfrak{M}'$ gilt, wenn A und B regulär sind:

$A * (B * C) = A * B * C = (A * B) * C = (A * B) * C$. Wegen der Kommutativität von $*$
 ist damit das Assoziativgesetz gezeigt für den Fall, daß
 höchstens ein Faktor nicht regulär ist.

b) Sei nun A regulär, $C = C' - C''$ mit regulären C', C'' .

Für beliebiges $B \in \mathfrak{M}'$ gilt dann

$(A * B) * C = C * (A * B) = C' * (A * B) - C'' * (A * B) = A * C' * B - A * C'' * B = A * (C' * B) = A * (B * C)$.
 Damit sind zugleich wieder alle Fälle behandelt, in denen genau
 ein Faktor regulär ist.

c) Es bleibt der Fall $A, B, C \in \overline{O}$ zu untersuchen.

Sei $A = A' - A''$ mit regulären A' und A'' . Es gilt dann

$$\begin{aligned} A * (B * C) &= A' * (B * C) - A'' * (B * C) = \\ \text{nach b):} &= (A' * B) * C - (A'' * B) * C = \\ \text{nach (3.6.3):} &= (A' * B - A'' * B) * C = (A * B) * C. \end{aligned}$$

(3.6.5) $\bar{0}$ ist das einzige maximale Ideal des Grundringes.

Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Multiplikation $*$, wenn man (3.5) berücksichtigt, sowie (T), und daß $\parallel$ eine Γ -Äquivalenz ist. Für das Folgende sei L der eben konstruierte Grundring der EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathfrak{M}, \parallel)$. Zur Vorbereitung des Hauptsatzes soll nun eine Normalform für die Elemente von Γ angegeben werden. Wir setzen $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}$.

(3.7) Satz: Zu jeder Abbildung $\alpha \in \Gamma$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $B \in \mathfrak{M}^*$ und $A, D \in \mathfrak{M}'$ mit

$$\alpha = \begin{cases} A_+ B_* \Phi D_+ \Phi & \text{mit } D \in \bar{0}, \text{ wenn } \alpha \infty \parallel \infty, \\ A_+ B_* \Phi D_+ & \text{mit } D \in \mathfrak{M}^*, \text{ wenn } \alpha \infty \nparallel \infty. \end{cases}$$

Beweis: a) $\alpha \in \Gamma_\infty$. In diesem Fall hat man $D=0$. Mit $A=\alpha 0$ und $C=\alpha 1$, sowie $B=C-A$ gilt $A_+ B_* 0 = A_+ 0 = A$ und $A_+ B_* 1 = A+B = A^*(C-A) = C$.

Nach Eigenschaft (T) folgt $\alpha = A_+ B_*$. Gilt aber $A_+ B_* = A'_+ B'_*$, dann hat man $(A'_+)^{-1} A_+ = (B'_*)^{-1} B_*$ und damit $A'=A$ und $B'=B$.

b) $\alpha F = \infty \neq \alpha \infty$. Jetzt gilt $\alpha = \beta \Phi D_+ \Phi$ mit $D = -(\Phi F)$, wenn $F \parallel \infty$, und $\alpha = \beta \Phi D_+$ mit $D = -F$, wenn $F \nparallel \infty$. Jedesmal ist β eine Abbildung aus Γ_∞ , also von der Form $\beta = A_+ B_*$, wie unter a) gezeigt. Wie oben überzeugt man sich, daß die Elemente A, B, D eindeutig bestimmt sind.

Für alle Abbildungen A_* aus $\Gamma_{0, \infty}$ ist das Produkt $A_* \Phi$ eine Involution, da es 0 und ∞ vertauscht. Daraus folgt:

(3.8) Für alle A aus $\mathfrak{M}^*$ gilt $(A_*)^{-1} = \Phi A_* \Phi$.

Nun sind alle Vorbereitungen zur Formulierung und zum Beweis des Hauptsatzes getroffen.

(3.9) Hauptsatz: Hat eine EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathfrak{M}, //)$ mit $|\overline{\mathfrak{M}}| \geq 4$ die Eigenschaften (T), (I) und (III), dann ist Γ isomorph zur $PGL(2, L)$ über einem kommutativen lokalen Ring L mit 1 ; $\mathfrak{M}$ ist bis auf die Beschreibung der projektiven Geraden $P(L)$ über diesem Ring L , und $//$ ist die oben definierte Äquivalenzrelation auf $P(L)$.

Beweis:

$$(3.9.1) \text{ Durch } X \xrightarrow{\sim} \tilde{X} = \begin{cases} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{wenn } X \in \mathfrak{M}', \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset X \end{pmatrix}, & \text{wenn } X // \infty, \end{cases}$$

wird eine umkehrbar eindeutige Abbildung $\sim$ von $\mathfrak{M}$ auf die projektive Gerade $P(L)$ über dem Grundring L definiert.

Die Abbildung

$$P(L) \ni \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} X^{-1} * Y, & \text{wenn } Y \in \mathfrak{N}, \text{ dem maximalen Ideal von } L, \\ Y^{-1} * X, & \text{wenn } Y \text{ regulär,} \end{cases}$$

ist nämlich die Umkehrabbildung von $\sim$.

(3.9.2) Zu jedem $\gamma \in \Gamma$ gibt es genau eine Abbildung $\hat{\gamma} \in PGL(2, L)$ mit $\widetilde{\gamma C} = \hat{\gamma} \tilde{C}$ für alle $C \in \mathfrak{M}$. $\wedge$ ist ein Monomorphismus.

Zunächst folgt aus der Umkehrbarkeit von $\sim$, daß es höchstens eine solche Abbildung $\hat{\gamma}$ geben kann: Aus $\widetilde{\gamma C} = \hat{\gamma}_1 \tilde{C} = \hat{\gamma}_2 \tilde{C}$ folgt nämlich $(\hat{\gamma}_1)^{-1} \hat{\gamma}_2 \tilde{C} = \tilde{C}$ und $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$. Außerdem sieht man sofort, daß $\wedge$ ein Homomorphismus von Γ in $PGL(2, L)$ ist, falls $\wedge$ auf ganz Γ erklärt ist: Es gilt nämlich $\widetilde{\alpha\beta C} = \hat{\alpha}\hat{\beta}\tilde{C} = \hat{\alpha}\hat{\beta}\tilde{C}$ für alle $C \in \mathfrak{M}'$, wenn $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ existieren. Wie man aus Satz (3.7) sieht, bilden die Abbildungen $\hat{\phi}, A_*$ mit $A \in \mathfrak{M}^*$ und B_+ mit B aus $\mathfrak{M}'$ ein Erzeugendensystem von Γ . Es genügt aber, zu $\hat{\phi}$ und den A_* nur 1_+ hinzuzunehmen, um als Erzeugnis ganz Γ zu erhalten, da für $B \in \mathfrak{M}^*$ gilt: $B_+ = B_* 1_+ B_*^{-1}$ und $B_+ = (-1)_+ (1+B)_+ =$

$= (-1)_* 1_+ (-1)_* (1+B)_* 1_+ (1+B)^{-1}$ für $B \parallel 0$. Zum Beweis von (3.9.2) ist nun nur für alle Elemente α dieses Erzeugendensystemsein $\hat{\alpha} \in \text{PGL}(2, L)$ anzugeben mit $\widetilde{\alpha C} = \hat{\alpha} \widetilde{C}$ für alle $C \in \mathcal{M}$. Man setzt $\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{A}_* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\hat{1}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und rechnet nach:

$$\widetilde{\Phi C} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Phi C \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } C \not\parallel 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix} & \text{für } C \parallel 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \hat{\Phi} \widetilde{C} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Phi C \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } C \parallel \infty \\ \begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Phi C \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } C \in \mathcal{M}^* \\ \begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix} & \text{für } C \parallel 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$\widetilde{A_* C} = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_* C \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } C \in \mathcal{M}' \\ \begin{pmatrix} A_* 1 \\ \Phi C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} 1 \\ D \end{pmatrix} & \text{für } C = \Phi D \parallel \infty \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\hat{A}_* \widetilde{C} = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_* C \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } C \in \mathcal{M}' \\ \begin{pmatrix} A_* \\ \Phi C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} 1 \\ D \end{pmatrix} & \text{für } C = \Phi D \parallel \infty. \end{cases}$$

$$\widetilde{1_+ C} = \begin{pmatrix} 1+C \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{1}_+ \widetilde{C} \quad \text{für } C \in \mathcal{M}'.$$

Für $C = \Phi D \parallel \infty$ (also mit $D \parallel 0$) ist der Nachweis schwieriger. In diesem Fall wird $D_- = D_+ (-1)_*$ gesetzt und gezeigt:

(3.9.3) $[(1+D)^{-1} 1_+]^{-1} = [(1+D)^{-1} 1_+]^{\Phi D_- \Phi} (= \Phi D_- \Phi (1+D)^{-1} 1_+ \Phi D_- \Phi)$ für alle $D \parallel 0$. Da nämlich die Abbildung auf der rechten Seite ΦD festläßt, bleibt ΦD dann auch bei $[(1+D)^{-1} 1_+]$ fest,

woraus $1_+ \Phi D = (1+D)_* \Phi D$ folgt. Damit hat man aber

$$\widehat{1_+ C} = \widehat{(1+D)_* \Phi D} = \widehat{(1+D)_* \Phi D} = \begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+D \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ D \end{pmatrix} = \widehat{1_+ \Phi D} = \widehat{1_+ C}.$$

Wegen (3.8) gilt $\Phi A_* \Phi A_* = I$ und $A^{-1} = (A_*)^{-1} 1 = \Phi A$ für alle $A \in \mathcal{M}^*$. Wie in kommutativen Ringen üblich, schreiben wir $\frac{Y}{X} = X^{-1} * Y$ für $X \in \mathcal{M}^*$. Außerdem soll zur Vereinfachung von jetzt ab AB statt $A * B$ geschrieben werden.

Nun zum Beweis von (3.9.3): Alle $X \in \mathcal{M}^*$, $X \nmid (-1)$, werden sowohl von $\Delta = (-1)_+ (1+D)_*$ als auch von $\Theta = [(1+D)_*^{-1} 1_+] \Phi D_- \Phi$ auf Elemente von $\mathcal{M}$ abgebildet. Für diese X gilt

$$\Delta X = -1 + (1+D)X = -1 + X + DX$$

$$\Theta X = \Phi D_- \Phi (1+D)_*^{-1} \left[\frac{-1+X+XD}{-1+XD} \right]^{-1} = \left[D - \frac{(1+D)(-1+XD)}{-1+X+XD} \right]^{-1} = -1 + X + XD.$$

Weiter gilt $\Delta 0 = -1$,

$$\Theta 0 = \Phi D_- \Phi (1+D)_*^{-1} 1 = \Phi D_- (1+D) = -1.$$

Nur für $|\overline{\mathcal{M}}| = 4$ ist $\Delta = \Theta$ jetzt noch nicht gezeigt, da in diesem Fall bisher nur für zwei n.p. Punkte, nämlich 0 und 1, nachgewiesen wurde, daß auf ihnen Δ und Θ übereinstimmen. Für

$|\overline{\mathcal{M}}| = 4$, also $|R/N| = 3$, gilt

$$\Delta(-1) = (-1)_+ (1+D)_* (-1) = -1 - (1+D) = -(2+D)$$

$$\text{und } \Theta(-1) = \Phi D_- \Phi (1+D)_*^{-1} 1_+ \Phi D_- \Phi(-1) = \Phi D_- \left[\frac{1+D+1}{(1+D)} \right] = \\ = \left[\frac{D(2+D) - (1+2D+D^2)}{2+D} \right]^{-1} = -(2+D).$$

Damit ist (3.9.3) vollständig bewiesen.

(3.9.4) $\wedge$ ist ein Epimorphismus.

Dazu zeigt man: Die Gruppe $\text{PGL}(2, L)$ wird durch ihre Elemente

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{A}_*$, $\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{B}_+$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\phi}$ erzeugt. Sei also

$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, L)$. Dann gilt entweder $D \in \mathfrak{M}^*$, $\alpha = \begin{pmatrix} D^{-1} & A & D^{-1} & B \\ D^{-1} & C & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

oder $D \in N$, aber C regulär und $\alpha = \begin{pmatrix} C^{-1} & B & C^{-1} & A \\ C^{-1} & D & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Man kann

also für den Beweis o.B.d.A. $D=1$ annehmen. Sei also nun

$\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 1 \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, L)$. Da deshalb $(A-BC)$ regulär ist, gilt mit

$V = (A-BC)^{-1}$:

$$\alpha \hat{V}_* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VA & B \\ VC & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VBC+1 & B \\ VC & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & VC \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ so}$$

daß man schließlich erhält

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & VC \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3.9.5) Hat man $\mathfrak{M}$ dargestellt als projektive Gerade $P(L)$

über dem Grundring L , dann ist $\parallel$ identisch mit der oben definierten Parallelrelation auf $P(L)$.

Da Γ transitiv auf $\mathfrak{M}$ operiert, ist nur für ein X aus $\mathfrak{M}$

zu zeigen: $X \parallel Y \Leftrightarrow \tilde{X} \parallel \tilde{Y}$ für alle $Y \in \mathfrak{M}$. Wir wählen $X = \infty$, also

$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $Y \parallel \infty$ ist aber nach der Definition von $\sim$ gleichbedeu-

tend mit $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix}$, $d \in N$, dem maximalen Ideal von L . Dies ist

nun dann und nur dann erfüllt, wenn $\tilde{X} \parallel \tilde{Y}$ gemäß der Definition

in § 2.

§ 4 Verallgemeinerte Berührstrukturen

Wie in dem Bericht [3] von W. Benz und H. Mäurer verstehen wir unter einer Zykelebene eine Menge $\mathcal{V}$, in der gewisse Teilmengen - Zykel genannt - ausgezeichnet sind. Abweichend von [3] nennen wir aber die Elemente von $\mathcal{V}$ Punkte, da die Klasse der behandelten Zykelebenen auch die Möbiusebenen umfaßt. Zur Definition der Parallelrelation $\parallel$ auf $\mathcal{V}$ sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Es gibt zwei Punkte, die nicht gemeinsam einem Zykel angehören. Dann heißen die Elemente A und B von $\mathcal{V}$ genau dann parallel ($A \parallel B$), wenn es eine endliche Folge $A=X_1, X_2, \dots, X_n=B$ von Punkten aus $\mathcal{V}$ gibt, in der je zwei aufeinander folgende Glieder nicht gemeinsam einem Zykel angehören. Außerdem wird (eventuell überflüssig) $X \parallel X$ gesetzt für alle X aus $\mathcal{V}$.

2. Fall: Für je zwei Punkte von $\mathcal{V}$ gibt es immer einen Zykel, dem beide angehören. Dann wird für zwei Punkte A und B von $\mathcal{V}$ $A \parallel B$ gesetzt, wenn $A=B$, oder wenn es eine endliche Folge von Punkten aus $\mathcal{V}$ gibt, in der es zu je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern einen dritten Punkt von $\mathcal{V}$ gibt, der mit den beiden nicht gemeinsam einem Zykel angehört.

In beiden Fällen ist $\parallel$ eine Äquivalenzrelation.

Eine Zykelebene mit den Eigenschaften

(Z0) es gibt drei p.n.p. Punkte, $\mathcal{V}$ ist kein Zykel,

(Z3) durch drei p.n.p. Punkte geht genau ein Zykel,

wird Zykelebene im engeren Sinne genannt.

(4.1) Es sei $(\mathcal{V}, Z)$ eine Zykelebene im engeren Sinne ($\mathcal{V}$ die Punktmenge, Z die Zykelmenge). Dann ist jede Gruppe Γ von Automorphismen von $(\mathcal{V}, Z)$ eine EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{V}, \parallel)$, wenn sie die Eigenschaft (T) hat.

Der Beweis ist trivial.

Unter einer Berührrelation auf der Zykelebene $(\mathcal{V}, Z)$ wird eine Teilmenge B der Menge aller geordneten Tripel (x, P, y) mit x und y aus Z und P aus $\mathcal{V}$ verstanden, die folgende Eigenschaften erfüllt (wir schreiben xPy genau dann, wenn $(x, P, y) \in B$):

- (B) a) Aus xPy , $x \neq y$, folgt $\{P\} \subseteq x \wedge y \subseteq \bar{P}$.
- b) Aus $P \in x$ folgt xPx .
Aus xPy folgt yPx .
Aus xPy , yPz folgt xPz .
- c) Ist z ein Zykel, sind P, Q Punkte mit $P \in z$, $Q \notin z$, $P \neq Q$, dann gibt es einen Zykel y mit yPz und $Q \in y$.

Wir nennen eine Zykelebene im engeren Sinne $(\mathcal{V}, Z)$ mit einer Berührrelation B Berührstruktur und bezeichnen sie mit $(\mathcal{V}, Z, B)$. Spezielle Berührstrukturen sind die Berührstrukturen aus [1] (bei ihnen ist $\parallel$ die Identitätsrelation) und die Laguerreschen Berührstrukturen aus [2] (siehe § 5 dieser Arbeit).

(4.2) Satz: Es sei L ein kommutativer lokaler Ring mit 1 , $K \not\subseteq L$ ein lokaler Unterring von L , der die 1 von L enthält, und dessen maximales Ideal im maximalen Ideal von L enthalten ist. Dann ist die folgendermaßen definierte Zykelebene eine Berührstruktur (wir wollen sie später mit (K,L) bezeichnen): Punkte sind die Punkte der projektiven Geraden über L , Zykel sind die Bilder der projektiven Geraden $P(K)$ über K unter den Abbildungen aus der Gruppe $PGL(2,L)$.

Beweis:

(4.2.1) (K,L) ist eine Zykelebene im engeren Sinne.

Da $PGL(2,L)$ auf $P(L)$ 3-fach transitiv operiert, ist es nur nötig, zu untersuchen, wieviele Zykel durch $(0,1)$, $(1,1)$ und $(1,0)$ gehen. Da eine Abbildung aus $PGL(2,L)$, die drei p.n.p. Punkte von $P(K)$ auf $(0,1)$, $(1,1)$ und $(1,0)$ abbildet, zu $PGL(2,K)$ gehört, also $P(K)$ festläßt, ist $P(K)$ selbst der einzige Zykel durch $(0,1)$, $(1,1)$ und $(1,0)$. Diese Punkte sind p.n.p., wie man sofort aus der Voraussetzung entnimmt.

(4.2.2) Durch zPy genau dann, wenn es eine Involution in $PGL(2,L)$ gibt, die z mit y vertauscht und P festläßt, wird in (K,L) eine Berührrelation erklärt. Sie ist invariant unter den Abbildungen aus $PGL(2,L)$.

Zu der Eigenschaft (B)a): Da für $PGL(2,L)$ die Forderung (T) erfüllt ist, kann man zum Beweis $z=P(K)$ und $P=(1,0)$ annehmen. Die Involutionen aus $PGL(2,L)$, die P festlassen, sind von der Form $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $a \in L$. Wird $P(K)$ nicht festgelassen von einer

dieser Involutionen, dann wird kein Punkt von $P(K)$, der nicht zu P parallel ist, auf einen Punkt von $P(K)$ abgebildet, q.e.d.

Die Eigenschaft (B)b) ist erfüllt, da die zur Definition herangezogenen Abbildungen Involutionen sind.

Zur Eigenschaft (B)c): Sei xPy , yPz für einen Punkt P und Zykel x, y und z ; seien ι und κ Involutionen aus $PGL(2, L)$, die P festlassen und $y = \iota x$, $z = \kappa y$, also auch $z = \kappa \iota x$ erfüllen.

Da Eigenschaft (III) für $PGL(2, L)$ gilt, hat man $(\lambda \kappa \iota)^2 = I$ für alle Involutionen λ aus $PGL(2, L)$, die P festlassen.

Unter ihnen gibt es aber mindestens eine, die z festläßt, und für die - wir nennen sie μ - $(\mu \kappa \iota)$ nicht zu dem $\parallel$ -Kern von $PGL(2, L)$ gehört. Für sie ist also $\mu \kappa \iota$ wieder eine Involution. Also folgt xPz .

Als Korollar zu Satz (3.9) hat man nun

(4.3) Satz: Besitzt eine Berührstruktur $(\mathcal{P}, Z, B)$ mit $|\mathcal{P}| \geq 4$ eine Automorphismengruppe Γ , die als EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ die Eigenschaften (T), (I) und (III) hat, dann ist sie eine Geometrie (K, L) über einem Paar lokaler Ringe K und L .

Beweis: Nach Satz (3.9) kann sowohl $\mathcal{P}$ als auch z - für jeden Zykel z - beschrieben werden als projektive Gerade über einem lokalen Ring, etwa $\mathcal{P} = P(L)$, $z = P(K)$. Man sieht an der Konstruktion aus § 3 sofort, daß K ein Teilring von L ist.

Da - wieder nach Satz (3.9) - $\Gamma \cong PGL(2, L)$, ist alles bewiesen.

(4.4) Sei $(\mathcal{P}, Z, B)$ eine Berührstruktur mit einer EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{P}, \#)$ als Automorphismengruppe, die (T) und (I^*) erfüllt. Dann läßt jede Abbildung aus Γ mit zwei n.p. Fixpunkten A und B entweder jeden oder keinen Zykel durch A und B fest. Beweis: Sei z ein Zykel durch A und B, der unter α , einer Abbildung $\neq I$ aus $\Gamma_{A,B}$, festbleibt. Sei X ein Punkt von z , der weder zu A noch zu B parallel ist, $\alpha X = Y$. Sei weiter z' ein beliebiger anderer Zykel durch A und B, X' ein Punkt von z' , $A \# X' \# B$, $\gamma = (A \ B \ \frac{X}{X'})$ aus Γ . Dann gilt wegen (I^*) : $\alpha z' = \alpha \gamma z = \gamma \alpha z = \gamma z = z'$, wie behauptet. Für scharf dreifach transitive Permutationsgruppen $(\Gamma, \mathcal{M})$ gibt es folgende Alternative (siehe z.B. Tits [8]): Entweder jede Involution mit einem Fixpunkt hat noch genau einen weiteren; die Gruppe heißt dann von erster Art. Oder jede Involution mit einem Fixpunkt hat genau einen Fixpunkt; die Gruppe heißt dann von zweiter Art. In diesem Fall bilden die Involutionen mit gemeinsamem Fixpunkt A eine Gruppe, die regulär auf $\mathcal{M} - \bar{A}$ operiert. Ist $(\Gamma, \mathcal{M})$ von 1. Art, dann bilden die Produkte von zwei Involutionen mit Fixpunkt A eine Untergruppe, die regulär auf $\mathcal{M} - \bar{A}$ operiert. Wir sagen nun, daß die EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{M}, \#)$, die Eigenschaft (T) hat, von 1. Art ist, wenn jede Involution aus Γ , die einen Fixpunkt hat, noch einen zum ersten n.p. weiteren Fixpunkt besitzt.

(4.5) Satz: Gestattet die Berührstruktur $(\mathcal{P}, Z, B)$ eine Automorphismengruppe Γ , die als EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{P}, \#)$ von 1. Art

ist und die Eigenschaften (T) und (I*) hat, dann gilt für $P \in \mathcal{V}$ und $x, y \in \mathcal{Z}$ genau dann xPy , wenn es eine Involution ι in $I(P)$ mit $\iota x = y$ gibt.

Beweis: Es wird gezeigt: Ist P ein Punkt auf dem Zykel z , dann gilt $\kappa z P \kappa$ für alle κ aus $I(P)$.

Sei $\iota \in I(P)$, sei $\iota A = B$ für n.p. Punkte A und B aus $\mathcal{V}$. Da $(\Gamma, \mathcal{V}, \Pi)$ von 1. Art vorausgesetzt ist, hat ι neben P noch einen zweiten Fixpunkt $X \neq P$. Da der Zykel y durch A, B, P unter ι festbleibt, gilt $\iota x = x$ auch für den Zykel x , der y in P berührt und durch X geht. Nach (4.4) bleiben also alle Zyklen durch X und P fest unter ι . Ist nun z ein Zykel durch P , dann sei z' der Zykel durch X , der z in P berührt und durch X geht. Aus $z P z'$ folgt $(\iota z) P (\iota z')$ und wegen $z' = \iota z'$ auch $(\iota z) P z'$ und $(\iota z) P z$.

Damit ist aber (4.5) gezeigt: Ist nämlich P ein Punkt, und sind x und y Zyklen mit xPy , dann gilt für n.p. Punkte A und B , die beide n.p. zu P sind, mit $A \in x$, $B \in y$ und für die zugehörige Abbildung $\iota = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} P$ aus Γ : $y = \iota x$.

§ 5 Laguerresche Berührstrukturen

Eine Berührstruktur $(\mathcal{P}, Z, B)$ heißt Laguerresche Berührstruktur, wenn zusätzlich gilt:

(L) Ist z ein Zykel, P ein Punkt, dann gibt es genau einen Punkt Q mit $Q \parallel P$ und $Q \in z$.

(5.1) Eine Geometrie (K, L) aus § 4 ist genau dann Laguerresche Berührstruktur, wenn K Körper und L/N isomorph zu K ist für das maximale Ideal N von L . Solche Ringe wurden in [2] "Laguerresche K -Algebra" genannt.

(5.2) Besitzt eine Laguerresche Berührstruktur $(\mathcal{P}, Z, B)$ eine Automorphismengruppe Γ , so daß $(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ die Eigenschaft (T) hat, dann operiert die Untergruppe Γ_z von Γ , die den Zykel z auf sich abbildet, scharf 3-fach transitiv auf z ; alle diese Untergruppen Γ_z , $z \in Z$ sind isomorph. Die Beweise von (5.1) und (5.2) sind trivial.

Im Anschluß an Tits sagen wir nun, daß eine EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ von 1. Art ist, wenn jede Involution mit einem Fixpunkt noch einen weiteren, nicht zum ersten parallelen Fixpunkt besitzt. Andernfalls nennen wir $(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ von 2. Art.

(5.3) Satz: Für eine Laguerresche Berührstruktur $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, Z, B)$ sind äquivalent:

- (a) $\mathcal{L}$ ist eine Geometrie (K, L) , wobei L eine Laguerresche Algebra über K ist, einem kommutativen Körper von Charakteristik ungleich 2.

(b) $\mathcal{L}$ besitzt eine Automorphismengruppe Γ , die als EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{V}, \parallel)$ von 1. Art ist und (T) und (I) erfüllt.

Beweis: Zu zeigen ist nur, daß aus (b) schon (a) folgt, oder genauer, daß für die EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{V}, \parallel)$ mit (b) auch (III) erfüllt ist, weil man dann Satz (3.9) und (5.1) anwenden kann; $|\mathcal{V}| \geq 4$, weil $(\Gamma, \mathcal{V}, \parallel)$ von 1. Art ist.

Der Beweis wird nun in mehrere Schritte aufgeteilt.

(5.3.1) $I^2(A)$, die Menge aller Produkte von zwei Involutionsen aus $I(A)$, operiert regulär auf $\mathcal{V} - \bar{A}$.

Beweis: Weil Γ scharf dreifach transitiv auf den $\parallel$ -Klassen von $\mathcal{V}$ operiert, bildet ein Element von $I^2(A)$ entweder alle Punkte von $\mathcal{V} - \bar{A}$ oder keinen von ihnen auf einen parallelen Punkt ab. Seien $\alpha, \beta \in I^2(A)$, $\alpha B = \beta B = C$ für ein $B \in \mathcal{V} - \bar{A}$. Wir wollen zunächst $C \parallel B$ annehmen. Dann gehören, wie eben bemerkt, α und β zu H . Wegen Satz (4.4) wird andererseits jeder Zykel durch A von jeder Abbildung aus $I^2(A)$ in einen ihn berührenden übergeführt. Deshalb gilt $\alpha z = \beta z$ für jeden Zykel z durch A und B . Daraus folgt $\alpha = \beta$.

Sei nun $B \not\parallel C$. Dann bleibt - wieder nach Satz (4.4) - der Zykel z durch A, B und C fest unter α und β . Weil es in Γ_z - einer auf z scharf 3-fach transitiven Permutationsgruppe - aber nur ein Element gibt, das A als einzigen Fixpunkt hat und B in C überführt, folgt wiederum $\alpha = \beta$.

(5.3.2) Zu jedem Paar ι aus $I(A)$ und α aus $I^2(A)$ gibt es ein κ in $I(A)$ mit $\alpha = \kappa \iota$.

Beweis: Für $\alpha \in H$ sei C ein Punkt mit $B = \iota C \neq C$, für $\alpha \notin H$ sei $B=C$ der zweite Fixpunkt von ι . Mit $\kappa = \begin{pmatrix} C & \alpha B \\ \alpha B & C \end{pmatrix} A$ gilt dann in beiden Fällen $\alpha = \kappa \iota$.

Nun zum Beweis von Eigenschaft (III).

Seien $\iota, \kappa, \lambda \in I(A)$. Dann gehört $\alpha = \kappa \iota$ zu $I^2(A)$. Nach (5.3.2) gibt es ein $\mu \in I(A)$ mit $\alpha = \mu \lambda$. Daraus folgt nun $\iota \kappa \lambda = \alpha \lambda = \mu \lambda^2 = \mu$ und $(\iota \kappa \lambda)^2 = \mu^2 = I$.

(5.4) Sei $\mathcal{L} = (\mathcal{V}, Z, B)$ eine Laguerresche Berührstruktur, Γ eine Automorphismengruppe von $\mathcal{L}$, die als EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{V}, \parallel)$ die Eigenschaften (T) und (I*) hat. Dann hat keine Abbildung von Γ , die zwei n.p. Punkte A und B und einen Verbindungszykel von A und B festläßt, einen weiteren Fixpunkt.

Beweis: Angenommen, $\gamma \in \Gamma_{A,B}$ mit $\gamma z = z$ für einen Zykel z , der A und B enthält, hat einen weiteren Fixpunkt C. Wegen (T) ist C zu A oder B parallel. Wir nehmen o.B.d.A. $C \parallel A$ an. Sei z_C der Zykel durch C, der z in B berührt. Da C und z unter γ fest bleiben, gilt auch $\gamma z_C = z_C$. D' sei nun ein Punkt von z_C , der von B und D verschieden ist. Aus Satz (4.4) folgt, daß γ alle Zykel durch A und B festläßt; also auch z_D , den Zykel durch A, B, D. Es folgt, daß z_C und z_D die p.n.p. Punkte B, D, γD gemeinsam haben. Sie sind also gleich, was $A=C$ zur Folge hat.

(5.5) Satz: Sei $\mathcal{L} = (\mathcal{V}, Z, B)$ eine Laguerresche Berührstruktur, Γ eine Automorphismengruppe von $\mathcal{L}$, die als EIP-Gruppe

$(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ von 1. Art ist und die Eigenschaft (T) hat. Dann sind für $(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ die Eigenschaften (I) und (I*) äquivalent. Beweis: Es ist wegen Satz (1.1) nur zu zeigen, daß aus (I*) (I) folgt. Es soll dazu Lemma (1.5) angewandt werden. Sei also für p.n.p. Punkte A, B, C von $\mathcal{P}$ nun Φ die Involution aus $I(A)$, die B und C vertauscht. Da $(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ von 1. Art ist, hat Φ einen weiteren Fixpunkt D, der nicht zu A parallel ist. Nach (5.4) sind aber A und D die einzigen Fixpunkte von Φ , da der Zykel durch A, B und C festbleibt unter Φ . $(\Phi \gamma)^2 A = A$ gilt also nach Lemma (1.5) für alle γ aus $\Gamma_{B,C}$. Damit ist gezeigt, daß jede Abbildung aus Γ , die B und C vertauscht, eine Involution ist. Im Folgenden wollen wir die Laguerre-Ebenen im engeren Sinne unter den Laguerreschen Berührstrukturen kennzeichnen, die eine Automorphismengruppe besitzen, die $\mathbb{K}$ -fach transitiv auf den Punkten operiert und keine Pseudoinvolutionen enthält. Unter einer Laguerre-Ebene i.e.S. verstehen wir eine Laguerresche Berührstruktur $(\mathcal{P}, Z, B)$, die dem Berührsatz genügt: xPy gilt für $P \in \mathcal{P}$ und $x, y \in Z$ genau dann, wenn $x \wedge y = \{P\}$.

(5.6) Satz: Hat eine Laguerresche Berührstruktur $(\mathcal{P}, Z, B)$ eine Automorphismengruppe Γ , die als EIP-Gruppe $(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ mit $|\overline{\mathcal{P}}| \geq 4$ (T) und (I) erfüllt, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) In $(\mathcal{P}, Z, B)$ gilt der Berührsatz,

(2) $(\mathcal{P}, Z, B)$ ist eine Geometrie (K, L) , wobei L Ring der dualen Zahlen über dem kommutativen Körper K ist,

- (3) Γ ist als Permutationsgruppe auf $\mathcal{P}$ vom Rang 3, d.h. die Standuntergruppe Γ_A von Γ zu einem Punkt A von $\mathcal{P}$ hat genau drei Transitivitätsgebiete, also $\{A\}$, $\bar{A} - \{A\}$ und $\mathcal{P} - \bar{A}$. Läßt eine Abbildung aus H , dem $\parallel$ -Kern von Γ , zwei n.p. Punkte von $\mathcal{P}$ fest, dann auch alle, die zu einem von beiden parallel sind.

Beweis: Aus (1) folgt (2).

Zu zeigen ist wegen Satz (5.3) nur, daß Eigenschaft (III) erfüllt ist auch für den Fall, daß $(\Gamma, \mathcal{P}, \parallel)$ nicht von 1. Art ist. Dann folgt nämlich nach Satz (3.9) und (5.1), daß $(\mathcal{P}, Z, B)$ immer eine Geometrie $(K, L) - L$ Laguerresche K -Algebra über dem kommutativen Körper K - ist, für die bekanntlich genau dann der Berührsatz gilt, wenn L der Ring der dualen Zahlen über K ist.

Sei also vorausgesetzt, daß jede Involution aus $I(A)$ außer $\bar{A}$ keine Fixklasse besitzt.

(5.6.1) Seien ι, κ verschiedene Elemente von $I(A)$, $\iota\kappa \in H$.

Dann gilt $\iota\kappa C \neq C$ für alle $C \# A$.

Beweis: Angenommen, es existiert ein $C \# A$ mit $\iota\kappa C = C$. Dann gilt mit $D = \iota C$ auch $\iota C = \kappa C$ und $\kappa D = \iota D$. Da $D \# C$, folgt $\iota = \kappa$, q.e.a.

(5.6.2) Seien $\iota, \kappa, \iota', \kappa' \in I(A)$ mit $\iota\kappa$ und $\iota'\kappa'$ aus H . Dann folgt $\iota\kappa = \iota'\kappa'$ aus $\iota\kappa B = \iota'\kappa' B$ für ein $B \# A$.

Beweis: Sei $C = \iota\kappa B$. Da der Berührsatz gilt, gibt es in H_A

höchstens eine Abbildung α mit $\alpha B = C$ ohne Fixpunkt außerhalb $\bar{A}$. Da sowohl $\iota\kappa$ als auch $\iota'\kappa'$ nach (5.6.1) auf $\mathcal{O} - \bar{A}$ fixpunktfrei operieren, folgt $\iota\kappa = \iota'\kappa'$.

(5.6.3) Gehört das Produkt zweier Involutionen ι und κ aus $I(A)$ nicht zu H , dann ist es eine Involution.

Beweis: Sei $B \# A$, $\iota B = C$, $\kappa B = D$, also $C \# D$. Sei z der Zykel durch A, C, D , sowie C' der Punkt von z , der zu D parallel ist. Nun gilt ja $\iota = \iota_2 \iota_1$ mit $\iota_2 = \begin{pmatrix} B & C' \\ C & B \end{pmatrix} A$ und $\iota_1 = \begin{pmatrix} C' & C \\ C & C' \end{pmatrix} A$. Wegen (5.6.2) hat man $\kappa \iota_2 = \lambda \iota_1$ mit $\lambda = \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} A$. Daraus folgt $\kappa \iota = \kappa \iota_2 \iota_1 = \lambda$, q.e.d.

Nun kann man sofort Eigenschaft (III) herleiten.

Seien ι, κ, λ Involutionen aus $I(A)$. Sind sie paarweise nicht kongruent modulo H_A , dann sind sie paarweise vertauschbar, da ihre Produkte dann wieder Involutionen sind. Es gilt also $\iota\kappa\lambda = \iota\lambda\kappa = \lambda\iota\kappa = \lambda\kappa\iota = (\iota\kappa\lambda)^{-1}$. Daraus folgt $(\iota\kappa\lambda)^2 = I$.

Gehört aber etwa $\iota\kappa$ zu H_A , dann sei für ein B aus $\mathcal{O} - \bar{A}$ und mit $C = \iota\kappa B$, $D = \lambda B$ definiert: $\mu = \begin{pmatrix} D & C \\ C & D \end{pmatrix} A$. Dann gilt $\mu\lambda B = \iota\kappa B = C$ und deshalb $\iota\kappa\lambda = \mu\lambda\lambda = \mu$, also $(\iota\kappa\lambda)^2 = \mu^2 = I$.

Alle anderen Fälle lassen sich auf diesen zurückführen:

Gehört $\kappa\lambda$ zu H_A , aber nicht $\iota\kappa$, dann ist für $(\iota\kappa\lambda)^{-1} = \lambda\kappa\iota$ schon alles gezeigt; sind nur ι und λ kongruent modulo H_A , dann gilt ja $\iota\kappa\lambda = \iota\lambda\kappa$, womit man wieder fertig ist.

Aus (2) folgt (3).

Es ist nur nachzuweisen, daß die Standuntergruppe zu (1) von $\text{PGL}(2, D)$ für den Ring $D = K(\epsilon)$ der dualen Zahlen über einem

kommutativen Körper K transitiv operiert auf der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \in P(D), a \in N, a \neq 0 \right\}$. Seien also $a=c\varepsilon \neq 0$ und $b=d\varepsilon \neq 0$ singuläre Elemente von D ; c, d aus K . Dann gilt mit $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & dc^{-1} \end{pmatrix}$: $\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ und $\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aus (3) folgt (1).

(5.6.4) $\Gamma_{A,B}$ operiert für $A \neq B$ transitiv auf $\overline{B} - \{B\}$.

Nach Voraussetzung (3) existiert zu Punkten C und D aus $\overline{B} - \{B\}$ ein $\lambda \in \Gamma_B$ mit $\lambda C = D$. Sei $X = \lambda A$. Da $|\overline{C}| \geq 4$, gibt es einen Punkt $Y \in \overline{C}$ mit $Y \notin \overline{A} \cup \overline{X} \cup \overline{B}$. Mit $\iota = \begin{pmatrix} A & Y & B \\ Y & A & D \end{pmatrix}$ und $\kappa = \begin{pmatrix} Y & X & B \\ X & Y & D \end{pmatrix}$ gilt nun $A = \iota \kappa X$, $B = \iota \kappa B$, $D = \iota \kappa D$, also gehört $\iota \kappa \lambda$ zu $\Gamma_{A,B}$ mit $\iota \kappa \lambda C = \iota \kappa D = D$. Damit ist (5.6.4) bewiesen.

Es sei nun zu den Punkten A und B und dem Zykel $z(A \varepsilon z, B \varepsilon z)$ z' ein Zykel mit $B \varepsilon z'$ und $z \wedge z' = \{A\}$. Wir verstehen nun unter x den Zykel durch den Punkt X von $z' - A \neq X \neq B$, der z in A berührt. Außerdem setzen wir noch $\{D\} = z \wedge \overline{B}$ und $\{C\} = x \wedge \overline{B}$. Wir wollen nun annehmen, daß z und z' sich nicht berühren, daß also $x \neq z'$ gilt. Aus dem zweiten Teil von (3) folgt zusammen mit (5.6.4), daß es eine Abbildung δ in $\Gamma_{A,B}$ gibt, die z' festläßt und C in D überführt. Nach (4.4) bleibt bei δ auch der Zykel y durch B fest, der z in A berührt. Also gilt $(\delta z)Ay$ und $(\delta x)Az$. Daraus folgt aber $\delta x = z$, was nicht möglich ist, da δX zu z' und zu z gehörte im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme $x \neq z'$ war also falsch,

d.h. je zwei Zyklen z und z' mit $|z \cap z'| = 1$ berühren sich. Dies ist aber gerade die Aussage des Berührsatzes.

(5.7) Satz: Sei $\mathcal{L} = (\mathcal{V}, Z, B)$ eine Laguerresche Berührstruktur, $|\mathcal{V}| \geq 6$. Sei Γ eine Automorphismengruppe von $\mathcal{L}$, die als EIP-Gruppe von 1. Art 3-fach $\parallel$ -transitiv ist und keine Pseudoinvolutionen enthält. Äquivalent kann man diese Voraussetzungen auch so formulieren: Sei $\mathcal{L}$ eine Geometrie (K, L) mit einem kommutativen Körper K , $|K| \geq 5$, und einer Laguerreschen K -Algebra L , Charakteristik von K ungleich 2. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Sind z_1 und z_2 Zyklen mit $|z_1 \cap z_2| = 2$, dann gibt es einen Zyklus z_3 mit $|z_1 \cap z_3| = |z_2 \cap z_3| = 2$ und $z_1 \cap z_2 \cap z_3 = \emptyset$.
- (b) $N^2 = (0)$ für das maximale Ideal N von L .
- (c) Der $\parallel$ -Kern H von Γ operiert regulär auf jeder $\parallel$ -Klasse von $\mathcal{V}$, d.h. läßt ein $\eta \in H$ einen Punkt P fest, dann auch alle Q mit $Q \parallel P$.
- (d) H ist abelsch.

Beweis: In [5] hat Mäurer gezeigt, daß (b) aus (a) folgt. Allerdings konnte hier (a) etwas homogener formuliert werden, weil (T) und (I) vorausgesetzt werden.

Beweis von (b) $\Rightarrow$ (c):

Da alle Standuntergruppen H_P von H in Γ konjugiert sind, genügt es, (c) für ein einziges P zu beweisen. Wir wählen die algebraische Form von $\mathcal{L}$ und setzen $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann haben

wir die folgende Darstellung von H_P zur Verfügung:

$H_P = \left\{ \begin{pmatrix} 1+a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b \in N \right\}$. Es gilt für alle $Q \parallel P$, also $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix}$ mit $d \in N$, und $\begin{pmatrix} 1+a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aus H_P : $\begin{pmatrix} 1+a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a+bd \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot d = \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix}$, da $N^2 = (0)$.

Beweis von (c) $\Rightarrow$ (d):

Seien A, B, C p.n.p. Punkte von $\mathcal{V}$, α_1 und α_2 Abbildungen aus H . Wegen (c) gilt $\alpha_i = \begin{pmatrix} A & B & D \\ \alpha_i A & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ \alpha_i B & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ \alpha_i C \end{pmatrix}$ für $i=1,2$.

Da die Standuntergruppen $\Gamma_{A,B}$ zu n.p. Punkten A und B von $\mathcal{V}$ sowieso abelsch sind, ist nur zu zeigen:

Sind X, Y, Z p.n.p. Punkte, dann gilt für $\zeta = \begin{pmatrix} X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ und $\eta = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix}$ $\zeta\eta = \eta\zeta$. Das sieht man so:

$$\zeta\eta X = \zeta X = X', \quad \zeta\eta Y = \zeta Y' = Y', \quad \zeta\eta Z = \zeta Z = Z,$$

$$\eta\zeta X = \eta X' = X', \quad \eta\zeta Y = \eta Y' = Y', \quad \eta\zeta Z = \eta Z = Z. \text{ Also gilt } \eta\zeta = \zeta\eta.$$

Hieraus folgt nun, daß alle oben angegebenen Faktoren des Produktes $\alpha_1\alpha_2$ paarweise vertauschbar sind. Also sind es auch α_1 und α_2 .

Es sei bemerkt, daß (d) auch (c) impliziert (dies ist im folgenden Beweis nützlich): Der schon mehrfach angewandte Satz, daß jede auf einer Menge M transitive abelsche Permutationsgruppe auf M regulär operiert, hat dies zur Folge.

Beweis von (d) $\Rightarrow$ (a):

Seien z_1 und z_2 Zyklen, deren Durchschnitt aus zwei verschiedenen Punkten A und B besteht. Weiter sei δ eine Involution, die z_2 in sich überführt, A und B vertauscht, sowie zwei weitere echte Paare C, D und E, F ; also $\delta C = D$ und $\delta E = F$ mit $|\{A, B, C, D, E, F\}| = 6$. Daß es auch im kleinsten Fall $|\mathcal{V}| = 6$ eine

solche Involution gibt, liest man an der algebraischen Darstellung ab: Für jeden nicht quadratisch abgeschlossenen Körper K gibt es in $\text{PGL}(2, K)$ Involutionen ohne Fixpunkte; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist z.B. eine solche. Da kein endlicher Körper quadratisch abgeschlossen ist - wir interessieren uns für das Galoisfeld von 5 Elementen -, gibt es auch im fraglichen Fall eine Involution mit den geforderten Eigenschaften.

Den Zykel, der durch C, D und E geht, nennen wir z_3 . Da Γ 3-fach $\parallel$ -transitiv vorausgesetzt ist, gibt es Abbildungen β und ζ in H mit $\beta z_1 = z_2$ und $\zeta z_2 = z_3$, also $\beta A = A, \beta B = B, \zeta C = C, \zeta D = D$ und $\zeta \beta E = E$, da E zu z_1 und $z_3 = \zeta \beta z_1$ gehört. Da

δ die Fixpunkte von β wie auch von ζ vertauscht, gilt $\delta \beta \delta = \beta^{-1}$ und $\delta \zeta \delta = \zeta^{-1}$. Wegen (d) folgt $(\zeta \beta)^{-1} = (\beta \zeta)^{-1} = \zeta^{-1} \beta^{-1} = \delta \zeta \delta \delta \beta \delta = \delta \zeta \beta \delta$. Es gilt also $\delta \zeta \beta \delta E = (\zeta \beta)^{-1} E = E$,

woraus wegen $\delta E = F$ folgt $\zeta \beta F = F$. Da wir auch (c) verwenden dürfen, folgt $\zeta \beta F' = F'$ auch für den zu F parallelen Punkt

F' von z_3 . Damit ist $z_1 \cap z_3 = \{E, F'\}$ gezeigt, also $|z_1 \cap z_3| = 2$.

Literaturverzeichnis

- [1] Benz, W., Zur Möbiusgeometrie über einem Körperpaar. Arch. d. Math. 13 (1962).
- [2] Benz, W., Laguerre-Geometrie über einem lokalen Ring. Math. Z. 87 (1965).
- [3] Benz, W., Mäurer H., Über die Grundlagen der Laguerre-Geometrie. Ein Bericht. Jber. Deutsch. Math. Verein. 67 (1964).
- [4] Mäurer, H., Ein spiegelungsgeometrischer Aufbau der Laguerre-Geometrie I, II. Math. Z. 87 (1965).
- [5] Mäurer, H., Laguerre- und Blaschke-Modell der Laguerre-Geometrie. Math. Ann. 164 (1966).
- [6] Petkantschin, B., Axiomatischer Aufbau der zweidimensionalen Möbiusschen Geometrie. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Livre I 36 (1940).
- [7] Schiek, H., Gruppen mit Relationen $(abc)^2=e$. Math. Nachr. 13 (1955).
- [8] Tits, J., Généralisations des Groupes Projectifs. Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci., V. Sér. 35 (1949).
- [9] v.d. Waerden, B.L., Smid, L.J., Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Ann. 110 (1935).
- [10] Wielandt, H., Unendliche Permutationsgruppen. Vorlesung. Tübingen, 1959/60.

Lebenslauf

Am 24. September 1940 wurde ich als Sohn des Verwaltungsbeamten Johannes Melchior und seiner Ehefrau Liesel, geb. Herrmann, in Darmstadt geboren. In Groß-Eichen im Kreis Alsfeld/Oberhessen, wo sich unsere Familie 1944 niedergelassen hatte, besuchte ich von 1946 bis zu unserem Umzug nach Frankfurt/M. im Jahre 1950 die Volksschule. Nach einem weiteren Volksschuljahr bestand ich 1951 in Frankfurt die Aufnahmeprüfung am humanistischen Heinrich von Gagern-Gymnasium, dessen Schüler ich bis zum Abitur im Jahre 1960 blieb. Im Sommersemester 1960 wurde ich an der J.W. Goethe-Universität in Frankfurt mit Hauptstudienfach Mathematik immatrikuliert. Im Nebenfach studierte ich Physik. Im November 1963 legte ich die Diplomvorprüfung in Mathematik ab. Die Diplomhauptprüfung bestand ich im Februar 1966. Vom Wintersemester 1964/65 bis zum Sommersemester 1966 war ich am Institut für Angewandte und Instrumentelle Mathematik als wissenschaftliche Hilfskraft angestellt. Auf Vorschlag von Herrn Professor Benz, dessen Schüler ich auch in Frankfurt war, verwalte ich seit September 1966 eine Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Ruhr-Universität Bochum, an der ich im Wintersemester 1966/67 auch immatrikuliert wurde. Seit dem Sommersemester 1967 bin ich - als Student - zur Vorbereitung auf die Promotion beurlaubt.

Bochum, d. 2. September 1968

Wlrid Melchior

